

故 $M \geq \frac{a_1 + a_{2m}}{2} \geq \frac{a_m + a_{m+1} + m(m-1)}{2} \geq \frac{m^2 - m + 2}{2} = \frac{\left(\frac{n_0}{2}\right)^2 - \frac{n_0}{2} + 2}{2} = \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ (提示: $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{2m}\}$, 则 $M \geq a_k, k \in [1, 2m]$); 14 分

第二步:取特殊例子证得 $M = \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ 成立

另一方面,当 $b_1 = 1 - m, b_2 = 2 - m, \dots, b_{m-1} = -1, b_m = 0, b_{m+1} = 1, \dots, b_{2m-1} = m - 1$ 时,

$a_{k+1} + a_{k-1} - 2a_k = (a_{k+1} - a_k) - (a_k - a_{k-1}) = b_k - b_{k-1} = 1 > 0$,

取 $a_m = 1$, 则 $a_{m+1} = 1, a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_m, a_{m+1} < a_{m+2} < \dots < a_{2m}$,

且 $a_1 = a_m - (b_1 + b_2 + \dots + b_{m-1}) = \frac{1}{2}m(m-1) + 1$,

$a_{2m} = a_{m+1} + (b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_{2m-1}) = \frac{1}{2}m(m-1) + 1$,

此时 $M = a_1 = a_{2m} = \frac{1}{2}m(m-1) + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{n_0}{2} \times \left(\frac{n_0}{2} - 1\right) + 1 = \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ 16 分

综上, M 的最小值为 $\frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ 17 分

► 得到 $M \geq \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$, 得 1 分

► 取 $a_m = 1$, 得 1 分

► 证得 $M = \frac{n_0^2 - 2n_0 + 8}{8}$ 成立, 得 1 分

► 最后结论得 1 分

2025 年全国高考名校名师联席命制 数学信息卷(八)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	A	B	A	C	B	C	B	D	BD	ABD	ABC	$y=1$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$[2-\sqrt{3}, +\infty)$

信息卷(八)

1. A 【热考点】复数的除法运算

【深度解析】因为 $2 - zi = 1 + i$, 所以 $z = \frac{-1+i}{-i} = \frac{(-1+i)i}{-i^2} = -1 - i$.

故选 A.

2. B 【热考点】根据集合间的关系求参数取值范围

【深度解析】 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{Z} | x > -1\}$, $B = \{x | x \leq a\}$, 因为 $A \cap B$ 中有 2 个元素(易错:集合中的元素取整数), 则 $A \cap B = \{0, 1\}$, 所以 $1 \leq a < 2$. 故选 B.

3. A 【热题型】函数奇偶性的应用、由奇偶性求参数

【深度解析】设 $F(x) = f(x) - 1$, 因为 $F(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 所以 $F(x) + F(-x) = 0$, 即 $f(x) - 1 + f(-x) - 1 = 0$, 即 $f(x) + f(-x) = 2$, 所以 $f(1) + f(-1) = 2$. 因为 $F(0) = f(0) - 1 = 0$, 所以 $f(0) = 1$, 所以 $f(-1) + f(0) + f(1) = 2 + 1 = 3$. 故选 A.

4. C 【热考点】向量数量积、模的坐标运算

【深度解析】由向量 $a = (2, x)$, $b = (3, 1)$, 得 $2a - b = (1, 2x - 1)$. 因为 $(2a - b) \perp b$, 所以 $(2a - b) \cdot b = 3 + 2x - 1 = 2x + 2 = 0$, 解得 $x = -1$, 所以 $a + b = (5, 0)$, 所以 $|a + b| = 5$. 故选 C.

5. B 【热题型】排列组合、古典概型

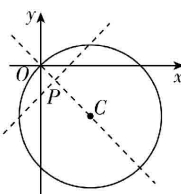
【深度解析】不妨假设六个小孩已经站好了位置, 则爸爸不同的站位方法数为 A_6^6 . 爸爸找到各自的小孩, 其为定序问题, 则不同站位方法数为 $C_6^3 C_3^3$, 所以不需要插队的概率 $P = \frac{C_6^3 C_3^3}{A_6^6} =$

$\frac{1}{36}$. 故选 B.

6. C 【热考点】直线与圆的位置关系、弦长的求解

【深度解析】由题可得, 圆 $C: x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$, 圆心 $C(3, -3)$, 半径 $r = 3\sqrt{2}$.

因为直线 $l: (m-1)x + 2y + 3 - m = 0$, 即 $m(x-1) + 2y - x + 3 = 0$, 令 m 的系数为 0, 即 $x = 1$, 解得 $y = -1$, 即直线 l 恒过定点 $P(1, -1)$. 因为 $1^2 + (-1)^2 - 6 - 6 < 0$, 所以定点 P 在圆 C 内部(关键:确定定点在圆内部).



设圆心 C 到直线 l 的距离为 d , 则弦长 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

当 $d = 0$ 时, 弦长 $|AB|$ 最大, 即过点 P 的最长弦长为圆 C 的直径 $2r = 6\sqrt{2}$; 当 d 最大时, $d_{\max} = |PC| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ (提示: 当 d 最大时, d 为圆心 C 与弦 AB 的中点 P 连线的长度), 此时弦长 $|AB|$ 最小, 最小值为 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d_{\max}^2} = 2\sqrt{18 - 8} = 2\sqrt{10}$. 综上, 线段 AB 的长度的取值范围为 $[2\sqrt{10}, 6\sqrt{2}]$. 故选 C.

7. B 【热考点】双曲线渐近线的求解

【深度解析】不妨设 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $M(x_0, y_0)$, 且 $x_0 \geq 2$ (提示: 注意 M 是双曲线 C 右支上的一个动点, 则横坐标大于等于 2), 则 $|MF_1|^2 - |MF_2|^2 = (x_0 + c)^2 + y_0^2 - [(x_0 - c)^2 + y_0^2] = 4cx_0 \geq 8c$, 所以 $8c = 8\sqrt{6}$, 解得 $c = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$, 故双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$. 故选 B.

一题多解 因为 $|MF_1|^2 - |MF_2|^2 = (|MF_1| - |MF_2|) \cdot (|MF_1| + |MF_2|) = 4(|MF_1| + |MF_2|) = 4(4 + 2|MF_2|) \geq 4[4 + 2(c-2)] = 8c$, 所以 $8c = 8\sqrt{6}$, 解得 $c = \sqrt{6}$, 则 $b = \sqrt{2}$, 故双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$. 故选 B.

8. D 【热题型】函数新定义、复合函数的单调性

【深度解析】根据题意可知,当 $a > 1$ 时,由复合函数的单调性可得 $f(x) = \log_a(a^x + 3t)$ 单调递增;当 $0 < a < 1$ 时,由复合函数的单调性可得 $f(x) = \log_a(a^x + 3t)$ 单调递减,因此 $f(x)$ 为增函数.若函数 $f(x)$ 是“二倍函数”,还需满足

$$\begin{cases} f(m) = \log_a(a^m + 3t) = 2m, \\ f(n) = \log_a(a^n + 3t) = 2n, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a^m + 3t = a^{2m}, \\ a^n + 3t = a^{2n}, \end{cases} \text{ 则方程 } a^{2x} - a^x - 3t = 0$$

有两个不相等的实数根 m, n . 令 $a^x = p$, 则关于 p 的一元二次方程 $p^2 - p - 3t = 0$ 有两个不相等的正实数根 p_1, p_2 , 因此

$$\begin{cases} (-1)^2 + 12t > 0, \\ p_1 + p_2 = 1 > 0, \\ p_1 p_2 = -3t > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{1}{12} < t < 0. \text{ 则实数 } t \text{ 的取值范围为}$$

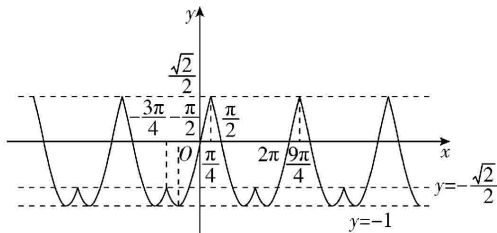
$$\left(-\frac{1}{12}, 0\right). \text{ 故选 D.}$$

关键点拨 本题关键在于根据“二倍函数”的定义得出关于 x 的方程 $a^{2x} - a^x - 3t = 0$ 有两个不相等的实数根 m, n , 再转化成二次函数根的分布问题即可求得结果.

9. BD 【热考点】三角函数的图象和性质, 函数图象的对称性, 函数的最值、单调性和零点的个数

【深度解析】当 $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$ 时, $\cos x \leq \sin x$; 当 $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$ 时, $\sin x \leq \cos x$,

画出函数 $f(x)$ 的大致图象, 如图.



由图象可知, 函数 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称, 故 A 错误; $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 B 正确; $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 故 C 错误; 当 $-1 < m < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 方程 $f(x) = m$ 在 $(0, 2\pi)$ 上有 4 个解, 故 D 正确. 故选 BD.

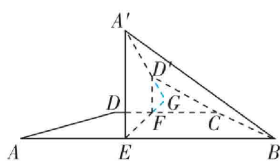
10. ABD 【热考点】棱台的判断、面面平行的证明、线面角的求解、利用线面垂直证明线线垂直

【深度解析】对于 A, 因为平面 $A'D'FE \perp$ 平面 $BCFE$, 平面 $A'D'FE \cap$ 平面 $BCFE = EF$, $BE \perp EF$, $BE \subset$ 平面 $BCFE$, 所以 $BE \perp$ 平面 $A'D'FE$, 又 $A'D' \subset$ 平面 $A'D'FE$, 所以 $BE \perp A'D'$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $A'E \parallel D'F$, $A'E \not\subset$ 平面 $D'FC$, $D'F \subset$ 平面 $D'FC$, 所以 $A'E \parallel$ 平面 $D'FC$,

因为 $BE \parallel CF$, $BE \not\subset$ 平面 $D'FC$, $CF \subset$ 平面 $D'FC$,

所以 $BE \parallel$ 平面 $D'FC$, 又 $A'E \cap BE = E$, $A'E, BE \subset$ 平面 $A'EB$, 所以平面 $A'EB \parallel$ 平面 $D'FC$, 故 B 正确;



对于 C, 因为 $\frac{D'F}{A'E} = \frac{1}{3}$, $\frac{FC}{EB} = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{D'F}{A'E} \neq \frac{FC}{EB}$,

所以多面体 $A'EBCD'F$ 不是三棱台 (提示: 利用棱台的几何性质找到线段长度比判断), 故 C 错误;

对于 D, 延长 $A'D'$, EF 相交于点 G,

因为平面 $A'D'FE \perp$ 平面 $BCFE$, 平面 $A'D'FE \cap$ 平面 $BCFE = EF$, $A'E \perp EF$, $A'E \subset$ 平面 $A'D'FE$, 所以 $A'E \perp$ 平面 $BCFE$, 则 $\angle A'GE$ 为直线 $A'D'$ 与平面 $BCFE$ 所成的角.

因为 $A'E \parallel D'F$, 所以 $\frac{D'F}{A'E} = \frac{GF}{GF+FE}$, 即 $\frac{1}{3} = \frac{GF}{GF+2}$,

解得 $GF = 1$, 则 $GE = 3$, 所以 $\tan \angle A'GE = \frac{A'E}{GE} = 1$,

则 $\angle A'GE = \frac{\pi}{4}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. ABC 【热风向】新定义曲线的图象及性质

思路导引 对于 A, B, 转化为三次方程根的个数问题研究;

对于 C, 举特例说明存在 a , 使得曲线 C_1 是偶函数的图象;

对于 D, 令 $x = 8$ 由零点存在定理说明方程至少有两根 \rightarrow 对应的 y 值不唯一, 即可说明 y 不是 x 的函数

【深度解析】对于 A, 曲线 $C_1: x^2 + y^3 - axy = 20$, 令 $x = 8$, 得关于 y 的一元三次方程 $y^3 - 8ay + 44 = 0$ (提示: 图象交点的个数转化为方程根的个数), 令 $f(y) = y^3 - 8ay + 44$, 则 $f'(y) = 3y^2 - 8a$, 所以方程 $f'(y) = 0$ 最多有两个实根, 即函数 $f(y)$ 最多有两个极值点, 即方程 $y^3 - 8ay + 44 = 0$ 最多有三个实根, 因此曲线 C_1 与直线 $x = 8$ 最多存在 3 个交点, 故 A 正确.

对于 B, 若曲线 C_1 如题图所示, 则存在 $x_0 > 0$, 使得直线 $x = x_0$ 与曲线 C_1 有三个交点, 即存在 $x_0 > 0$, 使得关于 y 的方程 $y^3 - ax_0y + x_0^2 - 20 = 0$ 有三个实根. 令 $f(y) = y^3 - ax_0y + x_0^2 - 20$, 则 $f'(y) = 3y^2 - ax_0$.

假设 $a \leq 0$, 则 $\forall x_0 > 0$ 都有 $f'(y) \geq 0$ 且等号不恒成立, 即 $f(y)$ 单调递增, 则方程 $y^3 - ax_0y + x_0^2 - 20 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上最多有一个实根, 与题图矛盾, 假设错误. 故 $a > 0$, 故 B 正确.

对于 C, 当 $a = 0$ 时, 曲线 $C_1: x^2 + y^3 = 20$, 即为函数 $y = \sqrt[3]{20 - x^2}$ 的图象, 设 $f(x) = \sqrt[3]{20 - x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, 定义域关于原点对称, 且 $f(-x) = \sqrt[3]{20 - (-x)^2} = \sqrt[3]{20 - x^2} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 故存在 a , 使得曲线 C_1 是偶函数的图象, 故 C 正确.

对于 D, 当 $a = 3$ 时, 曲线 C_1 的方程为 $x^2 + y^3 - 3xy - 20 = 0$.

令 $x = 8$, 得 $y^3 - 24y + 44 = 0$, 令 $f(y) = y^3 - 24y + 44$, 则 $f(0) = 44 > 0$, $f(3) = -1 < 0$, $f(4) = 12 > 0$, 由零点存在定理可知, 方程 $f(y) = 0$ 至少有两个实根, 则 $x = 8$ 对应的 y 值不唯一, 不符合函数的定义 (关键: 函数中自变量与函数值是“一对一”或者“多对一”的关系), 故 D 错误. 故选 ABC.

12. $y = 1$ 【热考点】抛物线的准线方程

【深度解析】 \because 抛物线 $C: x^2 = -2py$ 经过点 $(2, -1)$,

$$\therefore 4 = -2p \times (-1) = 2p, \text{ 解得 } p = 2, \text{ 则 } \frac{p}{2} = 1,$$

\therefore 准线方程为 $y = 1$.

13. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 【热点】正弦、余弦定理在解三角形中的应用

【深度解析】因为 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = \frac{9}{4}ac$, 所以由正弦定理得

$$\sin^2 B = \frac{9}{4} \sin A \sin C, \text{ 即 } \sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}.$$

由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - ac = \frac{9}{4}ac$, 即 $a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac$,

$$\text{根据正弦定理得 } \sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C = \frac{13}{12},$$

$$\text{所以 } (\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C = \frac{7}{4}.$$

因为 A, C 均为三角形内角, 所以 $\sin A + \sin C > 0$,

$$\text{则 } \sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

一题多解

由已知和正弦定理得 $\sin^2 B = \frac{9}{4} \sin A \sin C$,

$$\text{即 } \sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3},$$

$$\text{又 } B = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \cos(A-C) = \cos(A+C) + 2 \sin A \sin C =$$

$$-\cos B + 2 \sin A \cdot \sin C = \frac{1}{6}, \text{ 所以 } \sin A + \sin C = 2 \sin \frac{A+C}{2}.$$

$$\cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos(A-C)}{2}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{1+\frac{1}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

14. $[2-\sqrt{3}, +\infty)$ 【热风向】不等式恒成立问题和通过换元法求双变量函数的最值问题

【深度解析】原不等式等价于 $m \geq \frac{x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}}$,

$$\text{令 } z = \frac{x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} - \sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1}.$$

$$\text{令 } t = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}, \text{ 且 } t \geq 2,$$

$$\text{则 } z = t - \sqrt{t^2 - 1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 - 1}}, \text{ 该函数在 } [2, +\infty) \text{ 上单调递减},$$

$$\therefore z \leq \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}, \therefore m \geq 2-\sqrt{3}, \text{ 故实数 } m \text{ 的取值范围是}$$

$$[2-\sqrt{3}, +\infty).$$

解答题超详解及评分标准

信息卷 (八)

15. (1) $\frac{16}{25}$ (2) 见解析 (3) 有关

【热素材】频率估计概率、独立性检验

【解】(1) 由题表中的信息可知, 在这 100 天中, 进口贸易量与出口贸易量均不超过 100 亿元人民币的天数为 $32+18+6+8=64$,

用频率估计概率, 可得所求概率 $P = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$ 6 分

(2) 列出 2×2 列联表如下:

进口贸易量	出口贸易量	
	$[0, 100]$	$(100, 150]$
$[0, 100]$	64	16
$(100, 150]$	10	10

..... 10 分

(3) 零假设为 H_0 : 我国与该贸易中一天的进口贸易量与出口贸易量无关.

$$\text{由 (2) 得 } \chi^2 = \frac{100 \times (64 \times 10 - 16 \times 10)^2}{80 \times 20 \times 74 \times 26} \approx 7.484 > 6.635 = \chi_{0.01},$$

所以依据 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立, 即认为我国与该贸易中一天的进口贸易量与出口贸易量有关. 13 分

16. (1) $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$ (2) $T_n = (2n-1) \cdot 3^n + 1$

【热题型】数列通项公式的求解、错位相减法求数列前 n 项和

【解】(1) 第一步: 求出当 $n=1$ 时的通项公式

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } 4S_1 = 4a_1 = 3a_1 + 4, \text{ 解得 } a_1 = 4. \text{ 1 分}$$

第二步: 求出当 $n \geq 2$ 时的通项公式

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 4S_{n-1} = 3a_{n-1} + 4, \text{ 所以 } 4S_n - 4S_{n-1} = 4a_n = 3a_n - 3a_{n-1}, \text{ 即 } a_n = -3a_{n-1}, \text{ 3 分}$$

第三步: 求解

$$\text{又 } a_1 = 4 \neq 0, \text{ 所以 } a_n \neq 0, \text{ 故 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = -3, \text{ 4 分}$$

▶ 算出进口贸易量与出口贸易量均不超过 100 亿元人民币的天数给 3 分

▶ 求出概率给 3 分; 只有式子没有前面的文字表述扣 2 分

▶ 四空每对一空给 1 分

▶ 正确计算 χ^2 的值, 给 2 分

▶ 下结论给 1 分

▶ 求出 $n=1$ 时的情况给 1 分, 不写扣 1 分

▶ 求出 $n \geq 2$ 时的情况给 2 分

▶ 验证 $n=1$ 的情况给 1 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项, -3 为公比的等比数列,

所以 $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$ 6 分

(2) 第一步: 写出 $\{b_n\}$ 的通项公式

$$b_n = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 4 \cdot (-3)^{n-1} = 4n \cdot 3^{n-1},$$

第二步: 利用错位相减法求和

所以 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = 4 \times 3^0 + 8 \times 3^1 + 12 \times 3^2 + \dots + 4n \cdot 3^{n-1}$ 8 分

$$\text{故 } 3T_n = 4 \times 3^1 + 8 \times 3^2 + 12 \times 3^3 + \dots + 4n \cdot 3^n,$$

$$\text{所以 } -2T_n = 4 + 4 \times 3^1 + 4 \times 3^2 + \dots + 4 \cdot 3^{n-1} - 4n \cdot 3^n = 4 + 4 \cdot \frac{3(1-3^{n-1})}{1-3} - 4n \cdot 3^n = 4 + 2 \cdot 3 \cdot (3^{n-1} -$$

$$1) - 4n \cdot 3^n = (2-4n) \cdot 3^n - 2,$$

$$\therefore T_n = (2n-1) \cdot 3^n + 1. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

一题多解 (2) 第一步: 将 b_n 表示成关于 x 的函数

$$b_n = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 4 \cdot (-3)^{n-1} = 4n \cdot 3^{n-1},$$

将 b_n 改写为 $b_n = 4n \cdot x^{n-1}$, 其中 $x=3$, 8 分

第二步: 对求和公式进行求导, 将 $x=3$ 代入导数求解

$$\text{则 } T_n = 4(x^0 + 2x^1 + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}) = 4(x^1 + x^2 + x^3 + \dots + x^n)' = 4 \left[\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right]', = \frac{4(nx-n-1)x^n + 4}{(1-x)^2},$$

$$\text{将 } x=3 \text{ 代入上式得 } T_n = (2n-1) \cdot 3^n + 1. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

17. (1) 见解析 (2) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【热题型】线面平行的性质、二面角的正弦值的向量求法

(1) **【证明】**第一步: 证明 $AB \parallel$ 平面 PCD

因为 $AB \parallel EF$, $EF \subset$ 平面 PCD , $AB \not\subset$ 平面 PCD , 所以 $AB \parallel$ 平面 PCD 1 分

第二步: 证明 $AB \parallel CD$

因为 $AB \subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PCD = CD$, 所以 $AB \parallel CD$ 2 分

第三步: 求出 AC 的长

连接 AC , 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $\angle PCA$ 是 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角,

$$\text{则 } \tan \angle PCA = \frac{PA}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 解得 } AC = 4. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

第四步: 证明 $AB \perp BC$, 进而证明四边形 $ABCD$ 是直角梯形

因为 $AB=2$, $BC=2\sqrt{3}$, 所以 $AB^2 + BC^2 = AC^2$, 所以 $AB \perp BC$.

又 $AB \neq CD$, 所以四边形 $ABCD$ 是直角梯形. 6 分

(2) **【解】**第一步: 建立空间直角坐标系

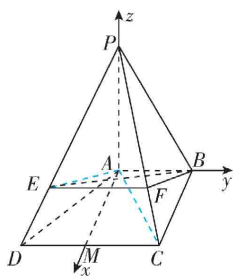
取 CD 的中点 M , 连接 AM , 则以 A 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0,0,0)$, $P(0,0,2\sqrt{3})$, $D(2\sqrt{3},-2,0)$, $C(2\sqrt{3},2,0)$, $B(0,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (0,2,0)$, $\overrightarrow{PC} = (2\sqrt{3},2,-2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{PD} = (2\sqrt{3},-2,-2\sqrt{3})$,

由 $\overrightarrow{PE} = 2\overrightarrow{ED}$, 得 $E\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, 则 $\overrightarrow{BE} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

..... 8 分



第二步: 求平面 PCD 和平面 ABE 的法向量

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 2\sqrt{3}x + 2y - 2\sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 2\sqrt{3}x - 2y - 2\sqrt{3}z = 0, \end{cases} \text{ 取 } x=1, \text{ 得 } y=0, z=1, \text{ 即 } \mathbf{n} = (1, 0, 1). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

连接 AE , 由 $AB \parallel EF$ 可知 A, B, E, F 四点共面, 设平面 ABE 的法向量为 $\mathbf{m} = (a, b, c)$,

▶ 写出等比数列的通项公式给 2 分

▶ 表示出 $\{b_n\}$ 的通项公式给 1 分

▶ 写出 T_n 给 1 分

▶ 错位相减得出 $-2T_n$ 给 5 分, 若过程正确, 只结果错误, 给 3 分

▶ 求出 T_n 给 2 分

▶ 将 b_n 写成关于 x 的函数给 2 分

▶ 求导过程给 5 分

▶ 求出 T_n 给 2 分

▶ 证出 $AB \parallel$ 平面 PCD 给 1 分

▶ 证出 $AB \parallel CD$ 给 1 分

▶ 求出 AC 给 2 分

▶ 证得四边形 $ABCD$ 是直角梯形给 2 分, 未说明 $AB \neq CD$ 扣 1 分

▶ 建系, 写出点 E 及其他相关点的坐标给 2 分

▶ 求出平面 PCD 的法向量给 2 分, 没有列方程的步骤扣 1 分

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = 2b = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{BE} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a - \frac{10}{3}b + \frac{2\sqrt{3}}{3}c = 0, \end{cases} \text{ 取 } a=1, \text{ 得 } b=0, c=-2, \text{ 即 } \vec{m}=(1,0,-2). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

第三步:求二面角 $P-EF-B$ 的正弦值

设二面角 $P-EF-B$ 的平面角为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = |\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\text{故二面角 } P-EF-B \text{ 的正弦值为 } \frac{3\sqrt{10}}{10}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

18. (1) $B(-5,6)$ (2) 见解析

【热题型】三角形垂心、外心性质在几何中的应用,椭圆中的定点问题

思路导引

(1) 根据垂心以及外心满足的等量关系 $\rightarrow |AD| = 2|EF|$ (F 为 BC 与 x 轴交点) \rightarrow 点 B 的横坐标 $\rightarrow |BE| = |AE| \rightarrow |BF|^2 + |EF|^2 = |AE|^2 \rightarrow$ 点 B 的坐标;

(2) D 和 E 关于点 O 对 $\rightarrow A, D, E, O$ 都在 x 轴上
称 A, D, E 三点共线 \rightarrow 设 BC 与 x 轴交点为 $F(-m, 0), B(-m, n), C(-m, -n), D(-s, 0), E(s, 0)$
 $AD \perp BC$ \rightarrow 点 B, C 关于 x 轴对称
 $|BE| = |CE|$

$$\left. \begin{aligned} &|AD| = 2|EF| \rightarrow s = 13 - 2m \quad AB \perp CD \rightarrow n^2 = (3m - 13)(m + 13) \\ &\text{直线 } AB \text{ 与椭圆 } T \text{ 的方程联立 } \xrightarrow{\Delta=0} b^2 = (13 - m)(3m - 13) \rightarrow c^2 = s^2 \rightarrow \text{结论得证} \\ &\text{椭圆 } T \text{ 与 } BC \text{ 切于点 } F \rightarrow a = m \end{aligned} \right\}$$

(1)【解】第一步:求直线 BC 与 x 轴的交点的横坐标

因为 $E(3,0)$, D 和 E 关于原点 O 对称, 所以 $D(-3,0)$.

设 BC 与 x 轴的交点为 $F(-m, 0)$ ($m > 0$), 如图所示.

由题意可得 $|AD| = 2|EF|$,

$$\text{即 } 13 + 3 = 2(m + 3), \text{ 解得 } m = 5. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

第二步:根据 $|BE| = |AE|$ 求点 B 坐标

设 $B(-5, n)$ ($n > 0$), 因为 $|BE| = |AE|$, 所以 $|BF|^2 + |EF|^2 = |AE|^2$,

$$\text{则 } n^2 + (3 + 5)^2 = (13 - 3)^2, \text{ 解得 } n = 6.$$

$$\text{所以 } B(-5, 6). \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(2)【证明】第一步:根据共线以及 $|AD| = 2|EF|$ 可得点 E 横坐标与点 F 的横坐标之间的关系

因为 D 和 E 关于原点 O 对称, 且 A, D, E 三点共线, 所以 A, D, E, O 四点共线, 即点 A, D, E, O 都在 x 轴上.

因为 $AD \perp BC$, 所以 $BC \perp x$ 轴.

因为 $\triangle ABC$ 的外心为 E , 所以 $|BE| = |CE|$, 所以点 B 与点 C 关于 x 轴对称. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

设 BC 与 x 轴的交点为 $F(-m, 0), B(-m, n), C(-m, -n), D(-s, 0), E(s, 0)$ ($m, n, s > 0$, 且 $m \neq s$).

$$\text{由题意可得 } |AD| = 2|EF|, \text{ 即 } 13 + s = 2(m + s), \text{ 化简得 } s = 13 - 2m. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

第二步:根据 AB, CD 满足垂直关系可得 m 和 n 的关系

$$\text{直线 } CD \text{ 的斜率为 } \frac{n}{-s+m} = \frac{n}{3m-13}, \text{ 直线 } AB \text{ 的斜率为 } -\frac{n}{13+m},$$

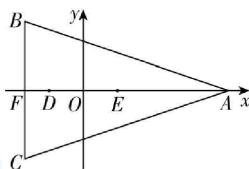
$$\text{所以 } \frac{n}{3m-13} \cdot \left(-\frac{n}{13+m}\right) = -1, \text{ 化简得 } n^2 = (3m-13)(m+13). \textcircled{1} \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

第三步:设直线 AB 的方程, 联立椭圆 T 的方程, 并根据判别式求解

$$\text{直线 } AB \text{ 的方程为 } y = -\frac{n}{13+m}(x-13).$$

► 求出平面 ABE 的法向量给 2 分, 没有列方程的步骤扣 1 分

► 求出结果给 3 分



► 写出点 D 的坐标给 1 分, 求出 m 的值给 2 分

► 得出 $|BF|^2 + |EF|^2 = |AE|^2$ 给 2 分

► 求出点 B 坐标给 2 分, 写出关于 n 的方程但解错了扣 1 分

► 得出结论给 2 分

► 得出 s 和 m 的关系给 1 分

► 得出 m 和 n 的关系给 3 分, 直线 CD 和 AB 的斜率写错 1 个扣 1 分

由 $\triangle ABC$ 有一内切椭圆 $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 可得 F 为 BC 与椭圆的切点, 所以 $a = m$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{n}{13+m}(x-13), \\ \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \text{整理得} [b^2(13+m)^2 + m^2n^2]x^2 - 26m^2n^2x + 169m^2n^2 - m^2b^2(13+m)^2 = 0.$$

$$\Delta = (26m^2n^2)^2 - 4[b^2(13+m)^2 + m^2n^2][169m^2n^2 - m^2b^2(13+m)^2] = 0,$$

$$\text{即 } 169n^2(13+m)^2 - b^2(13+m)^4 - m^2n^2(13+m)^2 = 0. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } (13+m)^2 \neq 0, \text{ 所以 } 169n^2 - b^2(13+m)^2 - m^2n^2 = 0,$$

$$\text{即 } (13+m)(13-m)n^2 - b^2(13+m)^2 = 0, \text{ 即 } (13-m)n^2 - b^2(13+m) = 0.$$

$$\text{结合①可得 } b^2 = (13-m)(3m-13).$$

$$\text{设椭圆 } T \text{ 的焦距为 } 2c, \text{ 则 } c^2 = a^2 - b^2 = m^2 - b^2 = m^2 - (13-m)(3m-13) = (2m-13)^2 = s^2,$$

$$\text{所以 } D, E \text{ 为椭圆 } T \text{ 的两个焦点.} \quad \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$

▶ 联立方程给 1 分

▶ 由 Δ 得出 m, n 和 b 的关系得 1 分

▶ 证出 D, E 为椭圆 T 的两个焦点给 2 分

19. (1) (i) $y = x + \frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2\sqrt{2}+1}{8}$ (2) 见解析

【热风向】导数的几何意义、新定义问题

思路导引 (1) (i) 先由点 A 在曲线 $y=f(x)$ 上求出点 A 坐标→利用导数求出 $f'(\frac{1}{4})$ →切线的点斜式方程→化简, 切线的斜截式方程;
(ii) 先由反函数性质得出 $y=f(x)$ 的反函数 $g(x)$, A 关于直线 $y=x$ 对称的点 D 的坐标→得出 k_{AD} 和 $|AD|$ →由 $AC \perp AD$ 得直线 AC 的方程→联立求出点 C 即可得 $|AC|$ →计算 $S_1 = |AD| \cdot |AC|$;
(2) 由题意设 A, D 关于直线 $y=x$ 对称, B, C 关于直线 $y=x$ 对称得 $AB \perp AD$ →设 $A(x_1, \ln x_1)$, $B(x_2, \ln x_2)$, $C(x_3, e^{x_3})$, $D(x_4, e^{x_4})$, $0 < x_1 < x_2$, $x_4 < x_3$ →由已知信息结合 $|AB| = |BC|$ 得到 $e^{x_1} - 2x_1 + \ln x_1 = 0$ →构造函数 $h(x) = e^x - 2x + \ln x$ 并利用导数研究其单调性→由 $h(x_1) = 0$ 和 $h(\frac{1}{2}) < 0$ 得 $x_1 > \frac{1}{2}$ →借助 $S = |AB|^2 = 2(e^{x_1} - x_1)^2$ 的单调性证明

(1) (i) 【解】第一步: 求出点 A 坐标

$$\text{因为点 } A\left(\frac{1}{4}, y_1\right) \text{ 在曲线 } f(x) = \sqrt{x} \text{ 上, 所以 } y_1 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

第二步: 求导并求出切线方程

$$\text{由 } f(x) = \sqrt{x}, \text{ 得 } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ 则 } f'\left(\frac{1}{4}\right) = 1,$$

$$\text{所以曲线 } y=f(x) \text{ 在点 } A \text{ 处的切线方程为 } y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{4} \text{ 即 } y = x + \frac{1}{4}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(ii) 第一步: 由反函数性质得出 $y=f(x)$ 的反函数 $g(x)$, A 关于直线 $y=x$ 对称的点为 D , 求出 AD 的长

$$\text{由(1)知 } A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \text{ 由 } f(x) = \sqrt{x} \text{ 得其反函数为 } g(x) = x^2 (x \geq 0),$$

则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 设 A 关于直线 $y=x$ 对称的点为 D ,

$$\text{则 } D \text{ 在曲线 } g(x) \text{ 上, 且 } D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), k_{AD} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = -1,$$

$$\text{则 } |AD| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

第二步: 求点 C 坐标及该“关联矩形”的面积

若 $AB \perp AD$, 则直线 AB 的方程为 $y = x + \frac{1}{4}$, 与曲线 $y=f(x)$ 相切, 不符合题意.

▶ 求出点 A 坐标给 1 分

▶ 求导给 1 分

▶ 求出切线方程给 1 分, 写成斜截式或一般式均给分

▶ 求出 AD 的长给 3 分, 其中直线 AD 斜率求错扣 1 分

若 $AC \perp AD$, 则 $k_{AC}=1$, 直线 AC 的方程为 $y=x+\frac{1}{4}$,

$$\text{联立} \begin{cases} y=x^2, \\ y=x+\frac{1}{4}, \end{cases} \text{解得 } x=\frac{1+\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } x=\frac{1-\sqrt{2}}{2} \text{ (舍去) (关键: 点 } C \text{ 在第一象限),}$$

$$\text{则 } C\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right), |AC|=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4+\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{则该“关联矩形”的面积 } S_1=|AD| \cdot |AC|=\frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{4+\sqrt{2}}{4}=\frac{2\sqrt{2}+1}{8}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(2)【证明】第一步: 证明 $AB \perp AD$

由 $f(x)=\ln x$ 得其反函数为 $g(x)=e^x$,

所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 且由其性质可知 $f(x)-g(x)<0$,

根据对称性可设 A, D 关于直线 $y=x$ 对称, B, C 关于直线 $y=x$ 对称, 则 $AB \perp AD$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

第二步: 设 A, B, C, D 四点坐标并由 $A(x_1, \ln x_1), B(x_2, \ln x_2), C(x_3, e^{x_3}), D(x_4, e^{x_4})$ 得出关于 x_1 的等式

设 $A(x_1, \ln x_1), B(x_2, \ln x_2), C(x_3, e^{x_3}), D(x_4, e^{x_4})$, 其中 $0 < x_1 < x_2$, $x_4 < x_3$,

$$\text{则 } x_4=\ln x_1, x_3=\ln x_2, x_2=e^{x_3}, x_1=e^{x_4}.$$

因为“关联矩形”是正方形,

所以 $k_{AB}=k_{DC}=1, k_{AD}=k_{BC}=-1$, 且 $|AB|=|BC|$,

$$\text{所以 } |AB|=\sqrt{2}(x_2-x_1)=\sqrt{2}(\ln x_2-\ln x_1), |BC|=\sqrt{2}(x_2-x_3),$$

$$\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

由 $|AB|=|BC|$, 得 $x_1=x_3=\ln x_2$, 所以 $x_2=e^{x_3}=e^{x_1}$,

所以由 $\ln x_2-\ln x_1=x_2-x_3$ 得 $x_1-\ln x_1=e^{x_1}-x_1$, 即 $e^{x_1}-2x_1+\ln x_1=0$.

第三步: 设新函数求出 x_1 的取值范围, 进而证明 $S > 2\left(\sqrt{e}-\frac{1}{2}\right)^2$

设 $t(x)=e^x-x-1, x \geq 0$, 则 $t'(x)=e^x-1 \geq 0$ 且不恒为 0,

故函数 $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x > 0$ 时, $t(x) > t(0) = 0$, 即 $e^x > x+1$.

$$\text{令 } h(x)=e^x-2x+\ln x, \text{ 则 } h'(x)=e^x+\frac{1}{x}-2 > x+1+\frac{1}{x}-2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}+1-2 > 0,$$

则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{又因为 } h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-1-\ln 2 < 0, \text{ 所以 } x_1 > \frac{1}{2}.$$

$$S=|AB|^2=2(x_2-x_1)^2=2(e^{x_1}-x_1)^2,$$

令 $\varphi(x)=e^x-x$, 则 $\varphi'(x)=e^x-1$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 则 $\varphi(x)$ 单调递增,

$$\text{所以 } \varphi(x_1)=e^{x_1}-x_1 > \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-\frac{1}{2} > 0,$$

$$\text{从而 } S=2(e^{x_1}-x_1)^2 > 2\left(\sqrt{e}-\frac{1}{2}\right)^2. \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$

关键点拨 解决本题的关键点: 一是正确处理 $A(x_1, \ln x_1), B(x_2, \ln x_2), C(x_3, e^{x_3}), D(x_4, e^{x_4})$ 四点的关系, 从而根据四点之间的关系结合 $|AB|=|BC|$ 得到 $e^{x_1}-2x_1+\ln x_1=0$; 二是建立函数 $h(x)=e^x-2x+\ln x$ 并利用导数研究其单调性, 从而由 $h(x_1)=0$ 和 $h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ 得 $x_1 > \frac{1}{2}$, 从而借助 $S=|AB|^2=2(e^{x_1}-x_1)^2$ 的单调性, 证得 $S=2(e^{x_1}-x_1)^2 > 2\left(\sqrt{e}-\frac{1}{2}\right)^2$.

► 求出直线 AC 的方程给 1 分

► 求出 AC 的长给 2 分, 未说明舍去方程的另一个根扣 1 分

► 求出面积得 1 分

► 证明 $AB \perp AD$ 得 2 分

► 表示出 AB 和 BC 的长给 2 分, 设点坐标符合题意亦可给分

► 得出关于 x_1 的方程给 1 分

► 证得结论给 2 分

